

# Efecto Doppler de focos extensos: una propuesta experimental

**Eduardo Díaz-Miguel Bermúdez**  
 IES Salvador Rueda, Dpto. de Matemáticas  
 (profesor jubilado), Málaga



En el estudio habitual del efecto Doppler se asume que los cuerpos que emiten luz o sonido son puntuales. En este trabajo, sin embargo, suponemos que la fuente emisora es una superficie. Con el fin de comprobar la validez de los resultados proponemos un experimento en el que el foco sonoro es un altavoz de membrana plana que, acoplado a un péndulo de torsión, ejecuta oscilaciones armónicas.

## Introducción

Uno de los ejemplos más conocidos a los que se recurre cuando se estudia el efecto Doppler sonoro es el de la sirena de una ambulancia que pasa delante de nosotros. En los esquemas explicativos (Figura 1) la sirena se asimila a un punto, F, que se mueve con velocidad  $\vec{v}_F$ . Supongamos que en O hay un observador en reposo que va recibiendo las ondas esféricas que F va emitiendo. Si  $v$  es la velocidad del sonido y  $\alpha$  es el ángulo que forma la velocidad del foco con la dirección de observación, OF, se demuestra [1] que la relación entre las frecuencias de emisión,  $\nu_F$ , y observación,  $\nu_O$ , es

$$\nu_O = \frac{\nu_F}{1 - \frac{v_F}{v} \cos \alpha} = \frac{\nu_F}{1 - \frac{1}{v} \vec{v}_F \cdot \vec{n}_F}, \quad (1)$$

en donde  $\vec{n}_F$  es el vector unitario de la recta determinada por F y O.

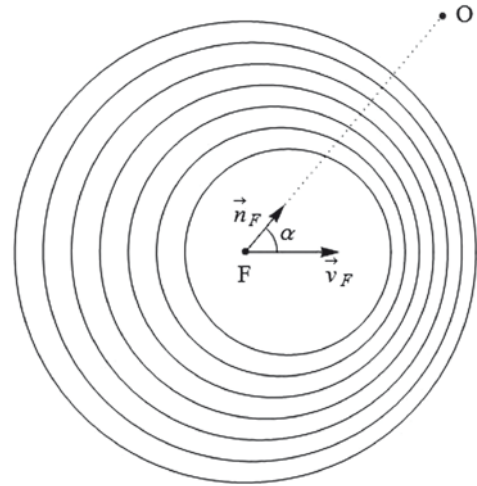
Cuando el foco emite ondas electromagnéticas, el método utilizado [2] para deducir la relación entre dichas frecuencias se basa en considerar dos sistemas de referencia: uno de ellos, S', es aquél en el que F está en reposo y emite con una frecuencia (frecuencia propia) igual a  $\nu_F$ . S' se mueve con velocidad  $\vec{v}_F$  respecto al sistema, S, en el que el observador, O, está en reposo. Pues bien, una transformación de Lorentz entre S y S' permite llegar a la siguiente relación:

$$\nu_O = \frac{\nu_F \sqrt{1 - (v_F/c)^2}}{1 - (v_F/c) \cos \alpha}, \quad (2)$$

Para velocidades no relativistas ( $v_F \ll c$ ) la ecuación (2) se convierte en la (1) cuando se sustituye la velocidad de la luz, c, por la del sonido, v.

En este trabajo vamos a estudiar lo que ocurriría si el foco emisor fuera un objeto, no necesariamente rígido, cuya superficie exterior vibrara con una determinada frecuencia. El procedimiento seguido para deducir el resultado principal (ecuación (3)) es similar al que empleo cuando el foco puntual se mueve en un medio no homogéneo [3].

En primer lugar establecemos la relación general entre las frecuencias de emisión y observación; después particularizamos la misma a dos casos sencillos de tratar desde el punto de vista geométrico: una fuente esférica en movimiento con radio variable y un plano que gira alrededor de un eje contenido en el mismo. Por último se propone un experimento destinado a comprobar la validez de la ecuación obtenida para el efecto Doppler del plano giratorio sonoro.



**Fig. 1.** Instantánea (en un cierto tiempo, t) de la configuración de siete de los frentes de onda esféricos que el foco, F, va emitiendo cada período, T, de las oscilaciones sonoras. Dichos frentes van siendo detectados por el observador O con una frecuencia distinta a la de emisión. La posición indicada del foco no es la que F tiene en el instante, t, en el que se ha tomado la fotografía, sino la que tenía cuando el frente ha recorrido la máxima distancia. Por lo tanto en esta figura F es el centro de la esfera exterior.

## Efecto Doppler de un foco extenso

El foco será en lo sucesivo una superficie,  $\Sigma(t_e)$ , que se mueve en un medio homogéneo. El subíndice “e” (de emisión) se justifica más adelante. Cada punto, P, de la misma viene determinado por sus coordenadas curvilíneas (u, v), que supondremos constantes durante la evolución. Por ejemplo, si la superficie móvil es esférica las coordenadas de P son su longitud y latitud respectivas. La ecuación vectorial de  $\Sigma(t_e)$  es pues del tipo  $\vec{x}(u, v; t_e) = \vec{f}(u, v; t_e)$  en donde  $\vec{f}$  es la función que describe la variación temporal de su forma y posición en el espacio. Para simplificar la representación he suprimido una dimensión espacial en las Figuras 2 a 4. En la número 2 aparecen tres cortes bidimensionales de  $\Sigma$  en los instantes sucesivos  $t_1, t_2$  y  $t_e$ . Se ha incluido también la trayectoria,  $\gamma_0$ , de un cierto punto,  $P_0$ , cuyas coordenadas ( $u_0, v_0$ ) son constantes.

El hecho de que hayamos impuesto que las coordenadas curvilíneas de los puntos de la superficie emisora se mantienen constantes a lo largo de la evolución de la misma está justificado. En efecto, en mecánica de fluidos (o de medios continuos en general) existe lo que se denomina representación lagrangiana [4], en la que se describe la posición,  $\vec{x}_p$ , de cada partícula del fluido en función del tiempo y su posición inicial:  $\vec{x}_p = \vec{f}(\vec{x}_0; t)$ . Las coordenadas lagrangianas son las posiciones iniciales,  $\vec{x}_0$ , (evidentemente constantes) de cada una de las partículas que componen dicho fluido. Por otro lado, para estudiar la evolución del universo, se utilizan en

cosmología [5] las coordenadas comóviles. Se suelen denominar también acompañantes y “etiquetan” las posiciones espaciales de las partículas que componen el fluido cósmico. Por definición son constantes durante las fases de expansión o contracción que se puedan dar en el modelo cosmológico considerado. Lo que obviamente no se mantiene constante es la distancia física (distancia propia) entre las “partículas” (galaxias) de dicho modelo.

Volviendo a nuestro estudio, supongamos que en un cierto instante (de emisión),  $t_e$ , los puntos de  $\Sigma$  (Figura 2) se convierten en centros emisores de frentes de onda (esféricas). Si  $v$  es la velocidad de propagación de la perturbación en el medio, al cabo de un tiempo  $t > t_e$  el radio de cada una de dichos frentes será  $v(t - t_e)$ . Según el principio de Huygens [6], el lugar geométrico de los puntos alcanzados por dicha perturbación es la envolvente de todas estas esferas: la superficie paralela [7] a  $\Sigma(t_e)$  situada a una distancia  $d = v(t - t_e)$  de ella (nos fijaremos únicamente en la paralela situada en el lado al que apunta el vector normal a  $\Sigma$ ). Denominémosla  $\Sigma_p(t_e; t)$  y situemos en la misma a un observador,  $O$ , cuyo vector de posición respecto a nuestro sistema de coordenadas es  $\vec{x}_0$ . A este punto de  $\Sigma_p(t_e; t)$  le corresponde otro en  $\Sigma(t_e)$ , que vamos a denominar *foco efectivo*,  $F_{ef}$ , con vector de posición  $\vec{x}_{ef}(t_e)$ , de manera que  $O$  está sobre la normal a la superficie emisora en dicho punto. Por tanto  $\vec{x}_0 = \vec{x}_{ef}(t_e) + v(t - t_e) \vec{n}_{ef}(t_e)$  siendo  $\vec{n}_{ef}$  el vector unitario normal a  $\Sigma(t_e)$  en  $F_{ef}$ . Basándonos en estas observaciones se prueba en el apéndice que la frecuencia percibida por  $O$  en instante  $t$  es

$$v(\vec{x}_0, t) = \frac{v_F}{1 - \frac{1}{v} \frac{d\vec{x}_{ef}(t_e)}{dt_e} \cdot \vec{n}_{ef}(t_e)} \quad (3)$$

Esta ecuación, que debe compararse con la ecuación (1), es válida siempre que el término que está restando a la unidad en el denominador sea, en valor absoluto, menor que 1. A este respecto recordemos que cuando el foco es puntual su velocidad debe ser menor que la de propagación de la perturbación; en caso contrario aparecen ondas de choque [8].

Hagamos notar que las coordenadas curvilíneas del foco efectivo dependen de la posición del observador y del tiempo de emisión:  $u = u(\vec{x}_0; t_e)$  y  $v = v(\vec{x}_0; t_e)$ ; por lo tanto la derivada,  $d\vec{x}_{ef}/dt_e$ , que aparece en (3) no coincide con la velocidad de ningún punto cuyas coordenadas curvilíneas sean constantes, como es el caso del punto  $P_0$  de la Figura 2.

El tiempo de emisión,  $t_e$ , se denomina en Electrodinámica tiempo retardado [2] y es igual al tiempo en el que se realiza la observación,  $t$ , menos el que tarda la perturbación en propagarse desde el foco efectivo en el instante de emisión,  $F_{ef}(t_e)$ , hasta el punto,  $O$ , de observación. La relación que determina en forma implícita este tiempo como función de  $(\vec{x}_0, t)$  es

$$t_e = t - |\vec{x}_0 - \vec{x}_{ef}(t_e)|/v \quad (4)$$

Como hemos indicado, dado el punto de observación,  $O$ , el foco efectivo,  $F_{ef}$ , es el punto de la superficie emisora,  $\Sigma(t_e)$ , tal que la recta normal en el mismo contiene a  $O$ . Su cálculo es un problema de geometría diferencial que, en general, no es inmediato. No obstante, si el foco es una esfera o un plano, la obtención de  $F_{ef}$  es sencilla y se discute a continuación.

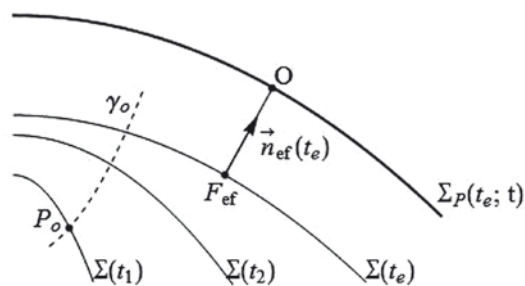


Fig. 2. Superficie emisora,  $\Sigma$ , (una dimensión suprimida) en tres instantes sucesivos:  $t_1$ ,  $t_2$  y  $t_e$ . En el instante  $t_e$  los puntos de  $\Sigma(t_e)$  emiten ondas esféricas elementales. Su envolvente en el tiempo  $t$  es la superficie paralela,  $\Sigma_p(t_e; t)$ , situada a una distancia de  $\Sigma(t_e)$  igual a  $v(t - t_e)$ . Solo consideramos la envolvente situada en el lado al que apunta el vector normal. Al punto de observación,  $O$ , cuyo vector de posición es  $\vec{x}_0$ , le corresponde el que hemos denominado foco efectivo,  $F_{ef}$ , con vector de posición  $\vec{x}_{ef}$ . La trayectoria,  $\gamma_0$ , es la de un cierto punto,  $P_0$ , cuyas coordenadas  $(u_0, v_0)$  son constantes durante la evolución de la superficie.

### Esfera móvil con radio variable

En la Figura 3 está representada la trayectoria,  $\Gamma$ , que describe el centro,  $C$ , de una esfera de radio variable,  $R(t_e)$ . Sea  $\vec{x}_c(t_e)$  el vector de posición de  $C$ . Obsérvese en esta figura que el foco efectivo es la intersección de la esfera con la recta que une  $C$  y el punto de observación. En consecuencia

$$\vec{x}_{ef}(t_e) = \vec{x}_c(t_e) + R(t_e) \vec{n}_{ef}(t_e) \quad (5)$$

Derivando respecto a  $t_e$ :

$$\dot{\vec{x}}_{ef}(t_e) = \dot{\vec{x}}_c(t_e) + \dot{R}(t_e) \vec{n}_{ef}(t_e) + R(t_e) \dot{\vec{n}}_{ef}(t_e) \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (3), y teniendo en cuenta que  $\vec{n}_{ef} \cdot \dot{\vec{n}}_{ef} = 0$ , se obtiene la frecuencia percibida en  $O$ :

$$v(\vec{x}_0, t) = \frac{v_F}{1 - \frac{1}{v} (\vec{v}_c(t_e) \cdot \vec{n}_{ef}(t_e) + \dot{R}(t_e))} \quad (7)$$

en donde  $\vec{v}_c = \dot{\vec{x}}_c$  es la velocidad del centro,  $C$ , y  $\vec{n}_F(t_e) \equiv \vec{n}_{ef} = (\vec{x}_0 - \vec{x}_{ef}(t_e))/|\vec{x}_0 - \vec{x}_{ef}(t_e)|$  el vector de posición unitario del punto de observación respecto a  $C$ .

Cuando el radio es constante,  $\dot{R}(t_e) = 0$ , de (7) se deduce, comparando con la ecuación (1), que la frecuencia observada es la misma que habría si en lugar de una esfera tuviéramos un foco puntual que se moviese con la velocidad de  $C$ .

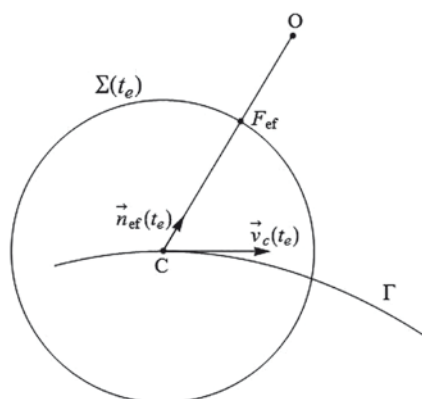


Fig. 3. Geometría del efecto Doppler de una superficie esférica móvil con radio variable.

**Plano giratorio**

Vamos a suponer que gira alrededor del eje Z con velocidad angular  $\dot{\alpha}(t_e)$ , siendo  $\alpha(t_e)$  el ángulo que forma con el eje X. En la Figura 4 está representado un corte transversal en el instante  $t_e$  con el plano XY. Dada la simetría de traslación a lo largo del eje Z, podemos trabajar exclusivamente en este plano, de manera que el vector de posición de O es  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$  y el del foco efectivo,  $\vec{x}_{ef}(t_e) = \lambda \vec{u}_{ef}(t_e)$ , en donde  $\lambda$  es la distancia orientada de  $F_{ef}$  al origen de coordenadas. Tengamos ahora en cuenta que  $\lambda = \vec{x}_0 \cdot \vec{u}_{ef}(t_e) = x_0 \cos \alpha(t_e) + y_0 \sin \alpha(t_e)$ . Por otra parte el vector normal  $\vec{n}_{ef}(t_e) = (-\sin \alpha(t_e), \cos \alpha(t_e))$  es perpendicular a  $\vec{u}_{ef}(t_e)$ , por consiguiente

$$\dot{\vec{x}}_{ef} \cdot \vec{n}_{ef} = (\dot{\lambda} \vec{u}_{ef} + \lambda \dot{\vec{u}}_{ef}) \cdot \vec{n}_{ef} = \dot{\lambda} \vec{u}_{ef} \cdot \vec{n}_{ef} = (x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha) \dot{\alpha}. \quad (8)$$

Sustituyendo (8) en (3) se obtiene

$$v(\vec{x}_0, t) = \frac{v_F}{1 - \frac{1}{v} (x_0 \cos \alpha(t_e) + y_0 \sin \alpha(t_e)) \dot{\alpha}(t_e)}, \quad (9)$$

Si el plano nunca atraviesa el punto de observación, la distancia entre éste y el foco efectivo es  $D = \vec{x}_0 \cdot \vec{n}_{ef}(t_e) = -x_0 \sin \alpha(t_e) + y_0 \cos \alpha(t_e)$ . Así que, según (4), el tiempo de emisión es la función implícita de  $\vec{x}_0$  y  $t$  determinada por la ecuación

$$t_e = t - D/v = t - (-x_0 \sin \alpha(t_e) + y_0 \cos \alpha(t_e))/v.$$

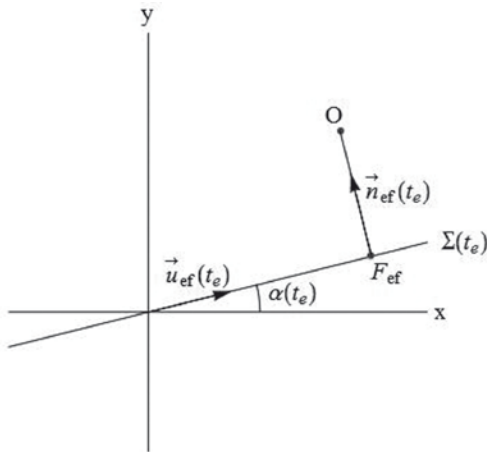


Fig. 4. Geometría del efecto Doppler de un plano giratorio.

**Experimento propuesto**

Un altavoz de membrana plana, que emite de forma continua una nota de cierta frecuencia, está acoplado a un péndulo de torsión que tiene la dirección del eje z (Figura 5). El plano que contiene a la membrana en reposo es el XZ y los puntos en los que se detecta la frecuencia son el A y el B. Sea  $\omega = 2\pi/T$  la frecuencia angular de oscilación del péndulo y  $\alpha_0$  la amplitud. El ángulo del plano del altavoz con el eje X es  $\alpha(t_e) = \alpha_0 \cos \omega t_e$ . Los segmentos OL y OR indican las posiciones de los lados izquierdo y derecho en los que la velocidad angular de éste es nula.

Como en la deducción de la ecuación (9) hemos supuesto un plano ideal infinito, hay que asegurarse de que los puntos de observación, A y B, están dentro de la región delimitada por las dos rectas perpendiculares a OL y OR en sus extremos y contenidas en el plano  $z = 0$ . Así evitamos el efecto de los

bordes. Esta observación es análoga a la que se hace cuando se calcula el campo eléctrico entre las placas de un condensador plano: el campo es perpendicular y constante en los puntos no cercanos a los bordes.

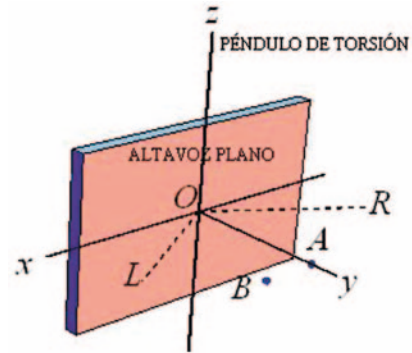


Fig. 5. Esquema del experimento destinado a comprobar la validez de la ecuación (11).

Si la distancia, D, del punto de observación, O, al plano del altavoz es del orden de un metro entonces el tiempo que tarda el sonido en recorrerla es de unas  $1/340 \text{ s} \approx 3$  milésimas de segundo. Podemos entonces aproximar el tiempo de emisión por el de observación, con lo cual la ecuación (9) proporciona la frecuencia percibida en O para los instantes  $t > D/v$ .

$$v(x_0, y_0, t) = \frac{v_F}{1 + \frac{\omega \alpha_0}{v} (x_0 \cos(\alpha_0 \cos \omega t) + y_0 \sin(\alpha_0 \cos \omega t)) \sin \omega t}. \quad (11)$$

Se podría efectuar una aproximación más precisa que  $t_e \approx t$ , tal y como  $t_e \approx t - D/v$ ; no obstante, con los puntos de observación elegidos, las curvas obtenidas no difieren apreciablemente de las proporcionadas por (11). El punto A(0, 0.5) está sobre el eje Y a una distancia  $D = 0.5 \text{ m}$ , y el B(0.2, 0.5) a la misma distancia que A, pero desplazado 20 cm a su izquierda (mirando al plano). El período de oscilación del péndulo es  $T = 0.5 \text{ s}$  y su amplitud  $\alpha_0 = \pi/6$ . El altavoz de la figura tiene un metro de anchura y emite la nota  $la_3$  ( $v_F = 440 \text{ Hz}$ ).

En la Figura 6 se representan las frecuencias de observación proporcionadas por dicha ecuación. La recta horizontal

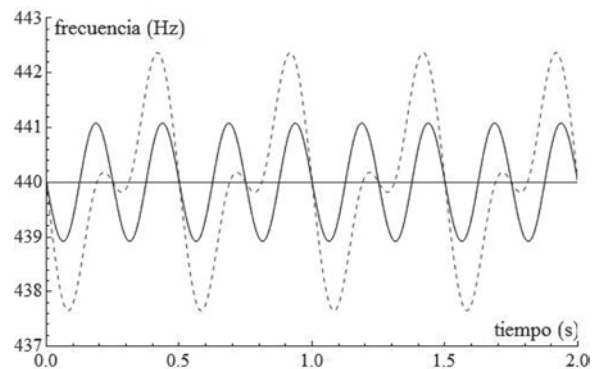


Fig. 6. La curva continua es la de la frecuencia detectada por el observador situado en A. La posición de este punto es simétrica respecto al plano del altavoz. La línea discontinua corresponde al punto B (posición asimétrica). El período de oscilación del péndulo de torsión es igual a 0.5 s, la amplitud es de  $\pi/6$  rad y el altavoz emite la nota  $la_3$  (440 Hz).

corresponde a la frecuencia de emisión. La curva continua es la de la frecuencia observada en A. Obsérvese que la frecuencia que el observador detecta en este punto varía con un período igual a la mitad del que tiene el péndulo. Esto es debido a que A está en la bisectriz de OL y OR: por cada oscilación del plano la parte que está a la derecha de A se acerca y aleja una vez, al igual lo hace, de forma simétrica, la parte a su izquierda. La frecuencia observada está en el intervalo (438.92,441.08) Hz. La curva discontinua corresponde al punto B, cuya posición es asimétrica respecto al plano del altavoz, lo que se refleja en el hecho de que el período ya no es la mitad de T, sino que coincide con él. En B la amplitud de oscilación de la frecuencia percibida es mayor que en A: (437.65,442.37) Hz.

### Apéndice

La distancia entre el foco efectivo y el punto de observación (Figura 2) es  $v(t - t_e)$ , por lo tanto

$$|\vec{x}_0 - \vec{x}_{ef}(t_e)|^2 = v^2(t - t_e)^2. \quad (A1)$$

La superficie  $\Sigma$  va emitiendo frentes de onda con una frecuencia  $\nu_f = 1/T$ , siendo T el período; por consiguiente los tiempos de emisión vienen dados por  $t_e = nT$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). La frecuencia,  $\nu(\vec{x}_0, t)$ , detectada en el instante t por el observador situado en O es el número de frentes que lo atraviesan por unidad de tiempo:  $\nu(\vec{x}_0, t) = \partial n / \partial t$ . El número de frente, n, viene dado en forma implícita por la ecuación que resulta de efectuar la sustitución  $t_e = nT$  en (A1):

$$|\vec{x}_0 - \vec{x}_{ef}(nT)|^2 = v^2(t - nT)^2. \quad (A2)$$

Al derivar (A2) respecto a t se obtiene

$$-2(\vec{x}_0 - \vec{x}_{ef}(nT)) \cdot \frac{d\vec{x}_{ef}}{dt} \nu T = 2v^2(t - nT)(1 - \nu T). \quad (A3)$$

A continuación sustituimos la relación  $\vec{x}_0 - \vec{x}_{ef}(nT) = v(t - nT)\vec{n}_{ef}$  en (A3) y se despeja  $\nu$ : el resultado es la ecuación (3).

### Referencias

- [1] S. BURBANO, E. BURBANO y C. GRACIA, *Física General* (Tébar, 2003, 32.ª ed.).
- [2] L. D. LANDAU y E. M. LIFSHITZ, *Teoría Clásica de los Campos* (Reverté, 1973, 2.ª ed.).
- [3] E. DÍAZ-MIGUEL, "Efecto Doppler en medios no homogéneos", *Revista Española de Física* **11** (4), 1997.
- [4] A. MOLINA, *Mecánica teórica: Mecánica Analítica y Mecánica de los Medios Continuos* (Universidad de Granada, 2014, 2.ª ed.).
- [5] J. CEPA, *Cosmología Física* (Akal, 2007).
- [6] M. BORN y E. WOLF, *Principles of Optics* (Pergamon Press, 1993).
- [7] A. GRAY, E. ABBENA y S. SIMON, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica* (Chapman & Hall/CRC, 2006).
- [8] E. DÍAZ-MIGUEL, "La envolvente de Mach en medios no homogéneos", *Revista Española de Física* **10** (3), 1996.

## La enseñanza de la Física: Una apasionante aventura a través del patrimonio de los institutos históricos

M.ª Matilde Ariza Montes  
Profesora de Física y Química  
IES Pedro Espinosa, Antequera, Málaga



La creación de los institutos de Segunda Enseñanza en España durante el siglo XIX fue esencial para la educación y, en particular, para la enseñanza de la Física, creando un nuevo modelo de aprendizaje experimental a través de los instrumentos científicos, diseñados en esta época de desarrollo científico y tecnológico.

Esta investigación está focalizada a la enseñanza de la Física en el siglo XIX, para tomar conciencia del rigor con el que se estudiaba esta disciplina hace una centuria y qué instrumentos científicos se utilizaban, para así explicar las diferentes leyes de la Física.

De la misma forma, se puede apreciar cómo se está investigando en un centro educativo de Enseñanza Secundaria este legado científico-histórico, poniéndolo en valor a través de su recuperación, restauración, conservación, exhibición y divulgación, lo que está concienciando al alumnado a valorarlo como pieza fundamental para el aprendizaje íntegro de la Física.

Se puede evaluar, igualmente, la inmensa contribución a la difusión de la Física que está generando el Museo Virtual del Patrimonio del IES Pedro Espinosa (MUVIPA), porque impulsa no solo la publicación de su legado científico-histórico, sino que también está patrocinando, de forma continua, actividades educativas para la transmisión del conocimiento de la Física.

### Introducción

En este artículo, se presenta la evolución que ha acompañado al patrimonio científico del IES Pedro Espinosa de Antequera (Málaga) desde su creación en el año 1928 hasta la actualidad, siendo su punto de inflexión la celebración de su 75 aniversario, fecha en que se empieza a recopilar este legado olvidado, en cierto modo abandonado y deteriorado por la falta de uso que trajeron los nuevos planes de estudios de 1970.

El objetivo principal es la puesta en valor de esta herencia centenaria que posee el centro, así como su restauración, conservación y difusión. Esto se lleva a cabo mediante las investigaciones que se están realizando y su utilización en la enseñanza de la Física a través de su patrimonio.

### Contexto histórico

En la década moderada del siglo XIX, período en que alcanzó la mayoría de edad Isabel II, se aprobó la Ley Pidal (1845), firmada por el ministro de Gobernación Pedro José Pidal el 17 de septiembre de 1845. Con posterioridad, se desarrollaron una serie de disposiciones, incluido el Reglamento para la